基礎講座３　挿入光源

理化学研究所・播磨研究所　田中隆次

1　挿入光源とは

挿入光源とは、偏向磁石放射よりさらに質の高い光を得るために考案された装置であって、蓄積リングにおいては隣り合った偏向磁石の間に「挿入される」ためにこのような名前がつけられている。挿入光源の概略を図１に示す。Ｎ極、Ｓ極の磁石を交互に並べて周期的な磁場を作り出し、電子を蛇行運動させることによって各周期から光が放出され、強度が増大する。また、磁場強度を変化させる（一般的にはギャップと呼ばれる上下磁石列の間隙を変化させる）ことにより、放射光のエネルギー（波長）を変化させることができる。挿入光源には大別してアンジュレータおよびウィグラと呼ばれる２つの種類がある。これらのうち、特にアンジュレータは光源サイズ・角度発散が小さい準単色光が得られるという利点があり、SPring-8 をはじめとする第三世代と呼ばれる放射光施設は、アンジュレータに最適化された蓄積リングを有している。

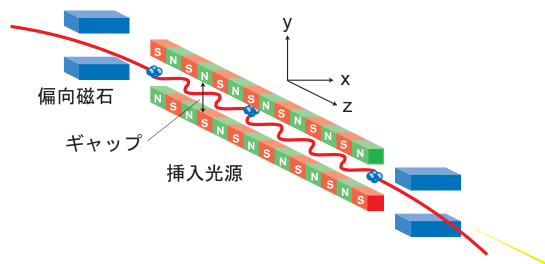

図 1: 挿入光源概要。隣接した偏向磁石の間にある直線部に挿入される形で設置される。

挿入光源の磁場を発生するためには主に永久磁石が用いられるが、ある種の目的のために電磁石を用いたものや、より高い磁場を得るために飽和磁束密度の高い磁性体を磁極材として用いたものなども開発されている。また、放射光の偏光特性の制御や光学素子の熱負荷軽減などを目的として特殊な電子軌道を実現するための磁気回路も開発されている。本稿では、垂直方向に周期的磁場を発生し、電子が水平面内において正弦波軌道を描くような、もっとも単純な挿入光源について解説する。

2　挿入光源磁場と相対論的電子の運動

挿入光源に入射された相対論的電子（速さが光速 c とほぼ等しい電子）の運動について考える。磁場 $\boldsymbol{B}$ 中を運動する電子の運動方程式は

$$d\boldsymbol{P}/dt = m\gamma d\boldsymbol{v}/dt = -e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{1}$$

で与えられる。ここで、m、e、$\boldsymbol{v}$ および $\boldsymbol{P}$ はそれぞれ電子の質量、電荷、速度および運動量であり、また γ は電子の全エネルギー (E_e) を静止エネルギー $(mc^2 = 0.511\text{MeV})$ で割ったもので、ローレンツ因子と呼ばれる。相対論的電子では $\gamma \gg 1$ である。挿入光源では z 方向の磁場は無視できるため (1) は簡単に積分でき、電子の横方向（x、y 方向）の速度、変位を与える次式を得る。

$$\beta_{x,y}(z) = \pm\frac{e}{\gamma mc}\int^{z} B_{y,x}(z')dz' \tag{2}$$

$$x, y(z) \quad = \quad \pm\frac{e}{\gamma mc}\int^{z}\!\!\int^{z'} B_{y,x}(z'')dz''dz' \tag{3}$$

ここで、電子の相対速度 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c$ を導入した。(2) および (3) を見ると、電子の横方向の速度および変位が磁場分布を積分した関数に比例していることがわかる。これらをそれぞれ挿入光源磁場の１次および２次積分と呼ぶ。

挿入光源の周期的磁場を実現するためによく用いられるのが、隣り合った磁石の磁化方向が 90 度だけ回転するように永久磁石を短冊状に並べた、Halbach 型と呼ばれる磁気回路である。この磁気回路では軸上 ($x = y = 0$) における磁場分布は $\boldsymbol{B} = (0, B_0\cos(2\pi z/\lambda_u), 0)$ と表される。

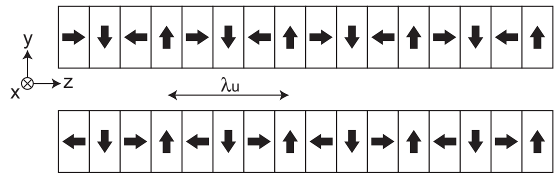

図 2: Halbach 型磁石列。４個の磁石が１周期を形成する。

ここで B_0 はピーク磁場であり、永久磁石の残留磁束密度、磁石ギャップ、および周期長 λ_u に依存する量である。(2) に代入すると、次式を得る。

$$\beta_x(z) = \frac{K}{\gamma}\sin\frac{2\pi z}{\lambda_u}, \quad x(z) = -\frac{K\lambda_u}{2\pi\gamma}\cos\frac{2\pi z}{\lambda_u}, \quad \beta_y(z) = 0, \quad y(z) = 0 \tag{4}$$

ここで、$K = \frac{eB_0\lambda_u}{2\pi mc}$ によって定義されるパラメータは偏向定数あるいはＫ値と呼ばれ、挿入光源の磁場強度を表す無次元数であり、K/γ が電子の最大の振れ角を与える。また、z 方向については、

$$\beta_z = \sqrt{\beta^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2}$$

から計算されるが、相対論的電子の場合は以下のように変形できる。

$$\beta_z \sim 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{4\gamma^2} + \frac{K^2}{4\gamma^2}\cos\left(\frac{4\pi z}{\lambda_u}\right) = \bar{\beta}_z + +\frac{K^2}{4\gamma^2}\cos\left(\frac{4\pi z}{\lambda_u}\right)$$

ここで

$$\bar{\beta}_z = 1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} \tag{5}$$

である。即ち z 方向で見ると、電子は平均速度 $\bar{\beta}_z$ で移動しながら、振幅 $\frac{K^2}{4\gamma^2}$、周期 $\frac{\lambda_u}{2}$ で調和振動を行う。平均速度 $\bar{\beta}_z$ は偏向定数 K の減少関数になっている。このように、挿入光源磁場は電子を実効的に減速させる*効果があり、これが挿入光源の波長可変性の源である。

3　挿入光源の分類

挿入光源は、機械的構造、磁場の種類、強度、利用する光のエネルギーや偏光特性などによってさまざまに分類することができる。SPring-8 で主に用いられているのは真空封止アンジュレータと呼ばれる、磁気回路的にはもっとも単純な挿入光源であるが、このほかにもヘリカルアンジュレータや楕円ウィグラといった円偏光をつくるためのものや、８の字アンジュレータと呼ばれる熱負荷を軽減するための挿入光源も利

*もちろん全速度 β は変化しない

用されている。これらの細かな分類以前に、挿入光源はウィグラとアンジュレータという２つの種類に分類することができる。ウィグラからの放射光は偏向磁石からの放射光を強度で積算したものであって、その特徴は基礎講座２で説明された偏向磁石放射のそれとほとんど同等である。一方アンジュレータ放射は、各周期で放出された光を電場の振幅で積算したものであって、その特徴は偏向磁石放射のそれと大きく異なる。以下では電子が水平面内で正弦波的運動を行う、最も単純なアンジュレータ放射の特徴について説明する。

4　アンジュレータ放射を理解するための基礎知識

放射光の特性を定量的に理解するには、リエナール・ヴィーヘルトポテンシャルと呼ばれる運動する点電荷によるポテンシャルを用いて放射電場を計算する必要がある。しかしながら放射電場を表す式は非常に複雑であり、そこから物理的な意味を理解するのは難しい。そこで、以下ではアンジュレータ放射を定性的に理解するために必要な物理・数学の知識について解説する。

4.1　電子からの光の放出

基礎講座２「光の発生」でも解説されているように、電子が（加速度を受けて）運動する場合、光を放出する。では光とはなんであろうか？古典的（非量子力学的）には光は電場と磁場が直交しながらある方向へ進行する波である。一方、電荷はクーロンの法則により電場を発生し、さらにそれが運動すればビオ・サバールの法則により磁場を発生するから、電子が運動すれば光としての電磁波を発生するのは自然なことのように思える。これを電荷の運動による電気力線の変化という観点から説明する。

今、点電荷が時間 ΔT の間に距離 L だけ移動し、再び静止したとする。静止している点電荷からは放射状に電気力線が広がっている。では移動中に電気力線はどのように変化するであろうか。単純に考えると放射状に無限遠まで広がった電気力線がそのまま電荷とともに移動するように思える。これが正しいと仮定した場合、この電気力線、即ち電場ベクトルを継続的に測定している観測者は、その方向と大きさから電荷の位置情報を瞬時に得ることができる。これは、情報の伝達速度が有限であるとする相対性理論に反する。実際、時間変動する電荷分布による電場を記述するポテンシャル（遅延ポテンシャルと呼ばれる）は、

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d\boldsymbol{r}'$$

で表されるが、これは、電荷から距離 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ だけ離れたところでの時刻 t における電磁場は時刻 $t'=t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$ における電荷の状態で決定されることを表している。すなわち、電荷の位置情報（即ち電場ベクトル）は光速 c で伝わっていく。これを考慮すると、電荷移動完了後の電気力線の様子は図３に示したように、３つの不連続な領域からなる。

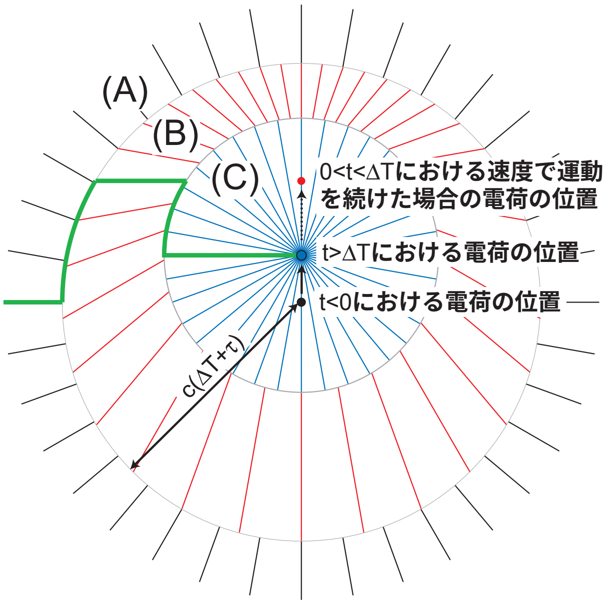

図 3: 運動する電子からの電気力線。

一番外側の領域 (A) は $t < 0$（電荷移動以前)、中側の領域 (B) は $0 < t < \Delta T$（電荷移動中)、内側の領域 (C) は $t > \Delta T$（電荷静止後)、の時刻領域における電荷の位置に相当する電場ベクトルを示している。電気力線が途切れたり、互いに交差しないようにするためには、各領域の境界を示す球（実際には、速さ v に到達するのに必要な時間に相当する厚みを持つ球殻）に沿って、緑の線で示すように電気力線をつなぐ必要がある。この電気力線が高速で空間中を伝搬していくため、観測者はこれを電場の振動（波）として観測する。詳しい計算によると、磁場も同様に振動することがわかるが、これがまさに電子からの光の放出である。同様なことを単振動している電子について考えると、電場が単一の波長を持った波として空間上を伝わることがわかる。

4.2　運動する発光体と光の放出角

運動する物体（運動の方向を z とする）が光を放出したときの角度分布について考察する。このため、物体とともに運動する座標系 A'（静止系）を考え、この系において y 方向に放出された光が、実験室系 A ではどの方向に進むか考える。古典力学における速度の合成則を適用すると、z 軸から $\theta_c = \tan^{-1}(v/c)$ の角度の方向へ放出されることになるが、この場合、A 系での光の速さは $\sqrt{c^2+v^2} > c$ であり、これはいかなる系においても光の速さは一定であるとする相対性理論に反する。

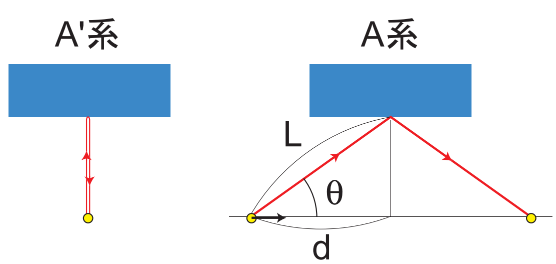

図 4: 光の放出法角度の変換。

そこで z 方向に無限に長い鏡を設置し、これによって反射された光の軌跡について考える。座標系 A' においては原点から z 方向に放出された光が鏡で反射された後、原点で検出される。この様子を系 A にいる観測者が観測すると図 4 のようになる。放出された光が鏡に到達する時間は $\Delta T = L/c$ であり、このあいだに発光点（A' 系の原点）は $d = v\Delta T = \beta L$ だけ進む。従って放出角は $\theta = \cos^{-1}\beta$ となる。即ち、実験室系 A にいる観測者は、この光が x 軸から $\cos^{-1}\beta$ の角度の方向へ放出されるのを観測することになる。相対論的電子の場合は $\theta = \sqrt{1-\beta^2} = \gamma^{-1}$ と変形される。

同じ考え方で、座標系 A' において任意の角度 θ で放出された光の進行方向は

$$\theta' = \tan^{-1}\left(\frac{\gamma^{-1}\sin\theta}{\beta+\cos\theta}\right)$$

となる。（これを導くには運動する物体の長さが進行方向に γ^{-1} だけ収縮し、これと垂直な方向には変化しない、というローレンツ収縮の定理を使う必要がある。）この式を用いて、$\beta = 0.95\,(\gamma = 3.2)$ のときに座標系 A 及び A' での光の進行方向をプロットしたものを図 5 に示す。このように、A' で等方的に光が放出された場合、A 系では $\theta < \gamma^{-1}$ の円錐に偏った分布となる。

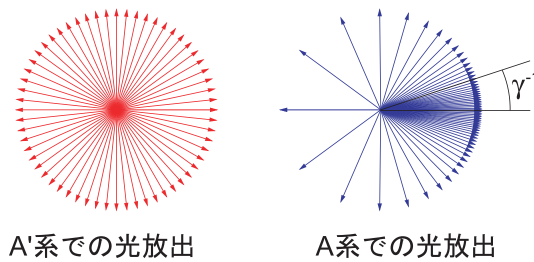

図 5: 光の放出法角度の変換。

4.3 ドップラー効果

ドップラー効果は、近づいてくる救急車のサイレン音が、通過前後で高い音から低い音へと変化することに見られるような、波源が運動することによって波の波長が変化する現象のことであるが、光も古典的には波であるので、ドップラー効果が起こる。図 6 に示したように、ドップラー効果による波長変化は波源の速度だけではなく、波の放出方向にも依存する。

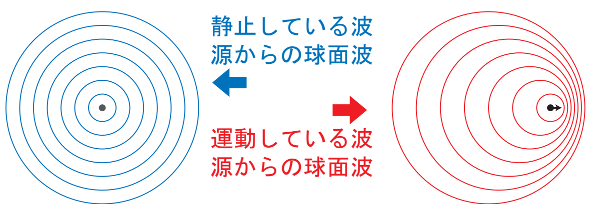

図 6: ドップラー効果。

波長の変化について定量的に考える。図 7 は速度 v で進む光源が、点 O（このときの時刻を $t=0$）及び O'（$t=\Delta t$）にあるときに放出された光の $t=\Delta T$ における波面を示している。明らかに $OB = c\Delta T$、$O'A = c(\Delta T - \Delta t)$ また、$OO' = v\Delta t$ である。図の 2 つの波面が隣り合った同位相の波面であるとすると、$\Delta t = \lambda/c$ であり、距離 AB はドップラー効果によって変化した波長とみなせるから、これを λ' とおく。$c\Delta T = R$、$\beta = v/c$ とおくと三角形 OAO' についての余弦定理より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}(R-\lambda')^2 + (\lambda\beta)^2 - 2(R-\lambda')\lambda\beta\cos\theta \\ = (R-\lambda)^2\end{aligned}$$

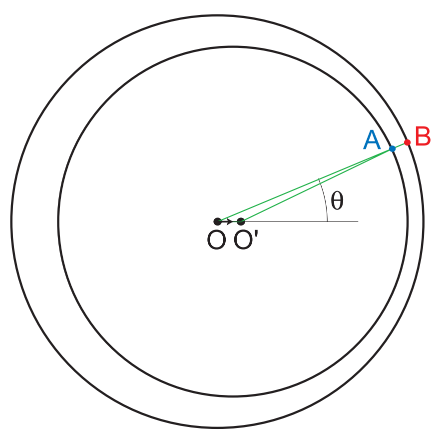

図 7: ドップラー効果による波長変化計算図。

λ/R 及び λ'/R を微少量として 2 次以上を無視すると

$$\lambda' = \lambda(1-\beta\cos\theta) \tag{6}$$

が得られる。先に述べたように、ドップラー効果による波長変化は β 及び θ に依存する。特に、前方（$\theta < \pi/2$）においては、光源速度が大きいほど、また観測角が小さいほど短波長側へシフトする。

4.4　フーリエ変換

すべての波はある振動数（波長、エネルギー）をもつ単一の波（＝単色波）を重ね合わせることにより再現できる。また、時間に対するある関数 $f(t)$ があるとき、これはある波の振幅の時間変化であるみなすことができる。したがって、関数 $f(t)$ は単色波に重みをつけて重ね合わせることにより再現できる。このとき、振動数 ω の単色波が持つべき位相と振幅は $F(\omega)$、$\phi(\omega)$ というように振動数の関数として書くことができる。まとめると、ある関数を表現するためには、時間に対する依存性を表す $f(t)$ を用いてもよいし、振動数に対する依存性を表す $F(\omega)$、$\phi(\omega)$ を用いてもよい。これらをそれぞれ関数の時間領域 (time domain) 表示、周波数領域 (frequency domain) 表示と呼ぶ。これらは表現方法が異なるだけであって、実際には同じ現象を記述している。これらの表現を結びつける関係を表すのがフーリエ変換である。

通常は位相 $\phi(\omega)$ を使うことは無く、$F(\omega)$ を複素数と見て位相を表現することが多い。これを複素振幅と呼ぶ。このときフーリエ変換は

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(i\omega t)dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(-i\omega t)dt$$

と書くことができる。アンジュレータ放射を考えるにあたって重要なフーリエ変換を以下にあげる。

$f(t)$	$F(\omega)$	
$\begin{cases} 1/\sigma_t; & -\sigma_t/2 \le t \le \sigma_t/2 \\ 0; & t < -\sigma_t/2, \sigma_t/2 < t \end{cases}$	$\dfrac{\sin\omega\sigma_t/2}{\omega\sigma_t/2} \equiv \mathrm{sinc}(\omega\sigma_t/2)$	矩形関数 ⇔ Sinc 関数
$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}\right)$	$\exp\left(-\frac{\omega^2\sigma_t^2}{2}\right)$	Gaussian ⇔ Gaussian

第 1 の関係で定義された Sinc 関数は信号処理理論などで頻繁に見られる関数であるが、アンジュレータ放射を考える上でも重要なものである。第 2 の関係は、Gaussian のフーリエ変換もまたやはり Gaussian であることを示している。これらの関係を見ると、時間領域における波のピーク幅と周波数領域におけるピーク幅は互いに逆比例の関係にあることがわかる。このように、フーリエ変換の関係で結ばれる 2 つの物理量の積は一般に定数となるが、これは量子力学における不確定性原理と等価である。

4.5　光の不確定性

前節のフーリエ変換の性質を適用すると、光に関して 2 つの重要な不確定性が得られる。1 つは時間に関する不確定性、他方は空間に関する不確定性である。

時間的不確定性：フーリエ限界

光とは電場・磁場が振動しながら進んでいく波であるから、空間のある点において観測した電場を時間に関してフーリエ変換することにより、スペクトル分解できる。この場合、2 つの極限が存在する。1 つは単色光であり、他方は白色光である。単色光とは、ある波長のみが含まれる、即ち δ 関数的スペクトルを持

つ光であり、上記の原理に従うと、時間領域において無限の持続時間をもつ光である。一方、白色光とは、すべての波長が含まれる光を指すが、上記原理により、無限に短い持続時間、即ち δ 関数的時間依存を持つ光である。もちろん、厳密な意味での単色光、白色光というものは存在しない。通常は波長がある小さな範囲に限定される場合を単色光と呼び、それ以外のものを白色光と呼ぶ。

時間の不確定性を電子からの光放出現象について考えてみる。電子が調和振動する場合、その振動と同じ周波数をもつ光が放出される。電子がある有限時間 ΔT だけ振動したとする。ドップラー効果や相対論効果を無視すると、観測者は ΔT のパルス幅（波の継続時間）をもつ光を観測することになる。前節の不確定性より、この光の周波数領域におけるピーク幅（＝スペクトル幅）は $\Delta\omega \sim 1/\Delta T$ となる。即ち、ある光パルスの継続時間が ΔT であったとすると、この光のスペクトルのピーク幅は $1/\Delta T$ 以下にはなり得ないということができる。これを光のフーリエ限界と呼ぶ。

空間的不確定性：回折限界

ここまでは時間 (t) と周波数 (ω) における関数の表記法についてであったが、まったく同じことが、位置 $(\boldsymbol{r})$ と角度（波数ベクトル $\boldsymbol{k}$）についてもあてはまる。簡単に説明するために、図 8 のようにある形状のスリットを通過した光の角度を観測する場合について考える。

スリットに到着するまでは光は太陽光のように完全な平行性をもっているものとする。スリットが大きいとき、光はほとんど影響を受けずそのまま進んでいく。即ち、ある方向（このときの角度を 0 とする）において強度が最大となり他の方向へ向かう光の強度は 0 である（平面波）。一方、スリットを無限小にした場合、光はあらゆる方向へ進んでいく。即ち、角度に対する依存性はなく、一定な強度分布をなす（球面波）。スリットの大きさは光のサイズを規定するものであるから、以上をまとめると、「光のサイズ（σ_r）と角度発散（$\sigma_{r'}$）の積は一定である」と言うことができる。これを光の回折限界と呼ぶ。実際、空間分布が Gaussian に従う光をフーリエ変換を用いて解析すると、$\sigma_r \sigma_{r'} = \frac{\lambda}{4\pi}$ が得られるが、この積を光の自然エミッタンスと呼ぶことがある。波長が短ければ短いほど自然エミッタンスは小さくなる。

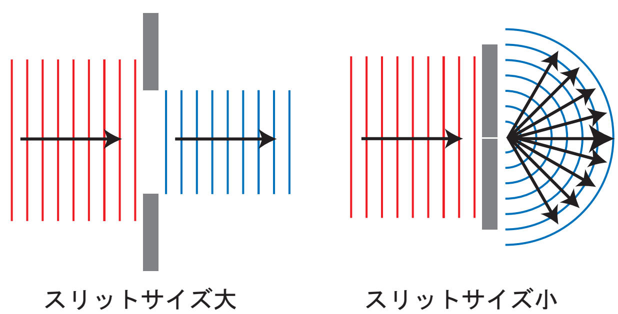

図 8: 完全平行光におけるスリットの影響。

5　アンジュレータ放射の特徴・基礎編

前節までに述べたことを考慮すると、アンジュレータを通過する電子からの放射光の性質について、複雑な数式を使うことなく定性的な知識が得られる。

5.1 基本波長

2 節で見たようにアンジュレータを通過する電子は正弦は軌道を描く。即ち振動数 $\nu = \lambda_u/v_z \sim \lambda_u/c$ で調和振動をする。4.1 節で述べたように単振動する電子は単色光を放出するので、この場合は振動数 ν の単色光を放出することになる。この光はドップラー効果によって、前方にいる観測者には短波長側にシフトして観測される。この波長シフトは観測角に依存し、軸上 $\theta = 0$ でもっとも短波長となる。ドップラー効果を表す式 (6) にアンジュレータ内の電子の z 方向の平均速度 (5) を代入すると次式が得られる。

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2}\left(1 + \gamma^2\theta^2 + \frac{K^2}{2}\right) \tag{7}$$

これはアンジュレータ放射の基本波長と呼ばれ、アンジュレータの周期長と K 値、電子エネルギー、及び観測角に依存する。周期長、電子エネルギー及び観測角は通常固定されるため、利用する光の波長を変えるためには、磁石ギャップを開閉して K 値を調節する。

5.2 スペクトル関数

アンジュレータ放射光のスペクトルを支配する関数は、フーリエ変換より導くことができる。周期数 N のアンジュレータを通過する電子は調和振動を N 回行うが、これは光の波の数[†]と等価であると考えられる。即ち、アンジュレータから放出される光波の継続時間は $T = N\lambda_1/c$ となる。従って放射電場の時間依存は

$$E(t) = \begin{cases} E_0 \sin\omega_1 t & ; -T/2 \le t \le T/2 \\ 0 & ; t < -T/2, T/2 < t \end{cases}$$

と書くことができる。ここでアンジュレータ放射の基本振動数 $\omega_1 = 2\pi c/\lambda_1$ を導入した。上式をフーリエ変換すれば光のスペクトルを表す以下の関数が得られる。

$$E_\omega = E_{\omega 0}\left[\mathrm{sinc}\left(\pi N \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1}\right) + \mathrm{sinc}\left(\pi N \frac{\omega + \omega_1}{\omega_1}\right)\right]$$

光の振動数 ω は正の実数で表されるが、Sinc 関数の δ 関数的性質より、第二項は第一項に比べて無視できる。従って、光の強度分布を表す関数 $I(\theta, \omega)$ は

$$I(\omega, \theta) = |E_\omega|^2 = I_0 \mathrm{sinc}^2\left[\pi N \frac{\omega - \omega_1(\theta)}{\omega_1(\theta)}\right] \tag{8}$$

となる。ここで $I_0 = E_{\omega 0}^2$ であり、また基本振動数が観測角 θ の関数であることを明示的に書いた。このように、アンジュレータ放射光の強度分布は Sinc 関数の平方によって決定されるが、これを導くのに必要なのはフーリエ変換とドップラー効果のみである。

観測角 θ を固定し、光のエネルギーを変化させるとエネルギースペクトルを表す関数 I_s が得られる。相対エネルギー $\epsilon = (\hbar\omega - \hbar\omega_1)/(\hbar\omega_1)$ を導入すれば I_s は次式で表される。

$$I_s(\epsilon) = I_0 \mathrm{sinc}^2(\pi N \epsilon) \tag{9}$$

[†]波数 $2\pi/\lambda$ ではない。

この関数を周期数を変化させてプロットしたものが図 9(a) である。アンジュレータの周期数 (N) が多いほどピーク幅は狭くなることがわかるが、これは、アンジュレータが長ければ電子から放出される光波の継続時間が長いことに対応している。

次に光の振動数 ω を固定し、観測角を変化させたときの強度分布について考える。この場合、基本振動数 ω_1 が変化する。興味があるのは、光のエネルギーを $\hbar\omega = \hbar\omega_1(0)$ 即ち軸上での基本エネルギーで固定したときの角度分布 $I_a(\theta)$ である。基本波長の式 (7) を用いると次式を得る。

$$I_a(\theta) = I_0 \mathrm{sinc}^2 \left[\pi N \frac{(\gamma\theta)^2}{1+K^2/2}\right] \tag{10}$$

これをプロットすると図 9(b) のようになる。観測角は $\Theta \equiv \theta/\sqrt{1+K^2/2}$ で示している。エネルギースペクトルの時と同様に、周期数が増えるとピーク幅が狭くなっていることがわかる。

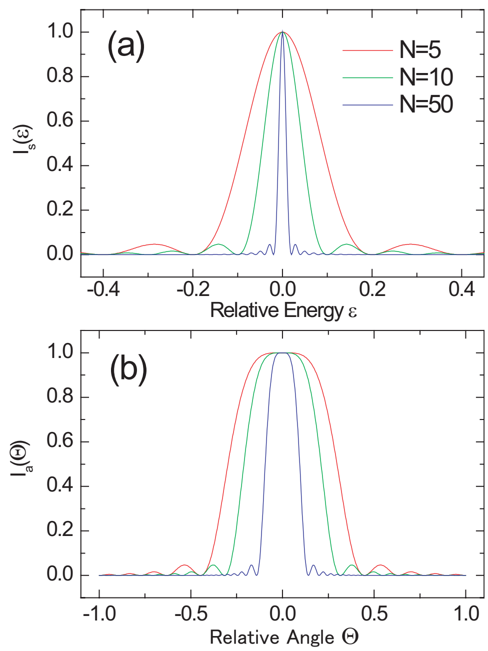

図 9: (a) エネルギースペクトル関数、(b) 角度分布関数の周期数に対する依存性。

5.3 角度発散と光源サイズ

前節で述べたように、周期数が増加するとエネルギー及び角度のピーク幅はいずれも減少する。4.5 節で述べた不確定性をこれに当てはめると、光波の継続時間及びサイズが広がっていると考えられる。光の継続時間については明らかであるから、ここでは光源サイズについて考える。

図 9(b) を見ると明らかなように、関数 I_a は Gaussian によって良く近似することができる。即ち、

$$I_a(\theta) = I_0 \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma_{r'}^2}\right) \tag{11}$$

パラメータ $\sigma_{r'}$ は、式 (10) と (11) が矛盾しないように決定されなければならない。このため、これらの式の積分値が同じ値をとることを要請する。即ち、定積分 $\int_0^\infty I_a(\theta) 2\pi\theta d\theta$ が一致するようにパラメータを決定する。ここで積分は θ に関しての 2 次元空間でのものになっていることに注意されたい。上記の積分はいずれも解析的に行うことができ、この結果 $\sigma_{r'}$ は以下のように決定される。

$$\sigma_{r'} = \sqrt{\frac{1+K^2/2}{4N\gamma^2}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2L}}$$

ここで $L = N\lambda_u$ はアンジュレータの全長、また、$\lambda = \lambda_1(\theta = 0)$ 及び式 (7) を用いた。これが光の角度分布を Gaussian で近似したときの標準偏差を表すから、4.5 節で述べた回折限界の定理より、光源サイズとして次式を得る。

$$\sigma_r = \frac{\sqrt{\lambda L}}{4\pi}$$

予測されるとおり、アンジュレータが長くなるに従って光源サイズは増大する。

5.4　高次光

前節まで基本エネルギーの光子に関して話を進めてきた。アンジュレータ放射光にはこれに加えて基本エネルギーの整数倍のエネルギーを持つ光子が含まれ、これらを高次光と呼ぶ。高次光が現れる原因について図 10 を用いて簡単に説明する。軌道上の各点において電子は光を放出するが、この光は 4.2 節で述べたように前方に偏った分布をしている。K 値が小さく、従って電子軌道の振幅も小さいときには、遠方の観測者は電子軌道において放出されたすべての光を観測する。しかしながら K 値が大きくなってくると、電子の偏向角が大きくなったところで放出された光が見づらくなる。さらに $K \gg 1$ のときには、電子がアンジュレータ軸に平行に走るわずかな部分で放出された光のみを観測できる。これを光波の振幅として示したものを図 10 の右側に示す。このように、K 値が大きくなるにつれて、正弦波に変調がかかり、これをフーリエ変換すれば高次光が得られる。尚、アンジュレータ軸上で観察する場合、対称性から偶数次光は観測されない。

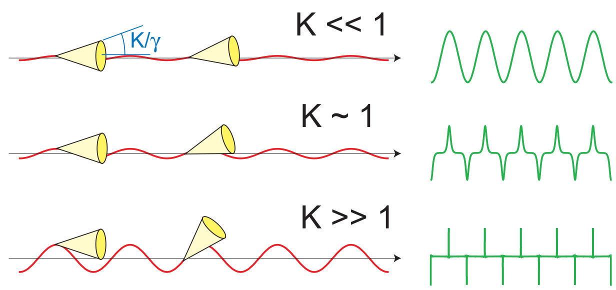

図 10: さまざまなK値に対する電子軌道・光分布と電場の関係。

5.5　パワーの空間分布

アンジュレータなどの放射光源の性能を評価する場合、最も重要なものはフラックスである。これは単位時間・単位バンド幅当たりの光子数で表され、これに分光器の分解能と実験時間を乗じたものが実際に利用できる光子数（例えばサンプルに照射される光子数）となる。図 9(b) はあるエネルギーにおける強度分布を示しているから、まさにフラックスの空間分布に相当する。一方、パワーとはフラックスに光のエネルギーをかけて全波長で積分したものであって、分光器や収束ミラーなどの光学素子に加わる熱負荷に相当する。従って、高フラックス・低パワーの光を供給するのが理想的な光源といえる。このためパワーの空間分布に対する知識が重要となる。$K = 2$ の場合のパワー分布の計算例を図 11 に示す。観測角度は γ^{-1} で規格化してある。

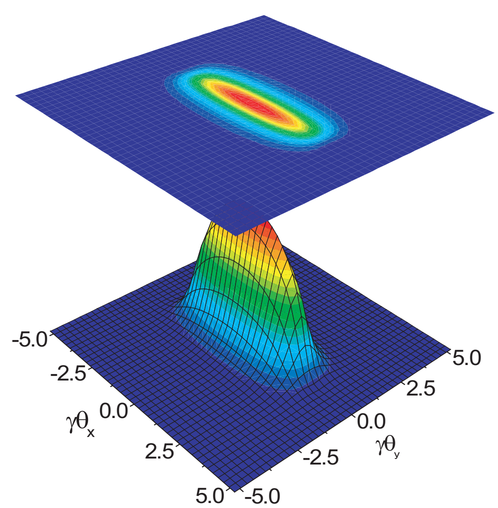

図 11: パワー空間分布の例。

このような空間分布の形は 4.2 節で導いた光の進行方向を考慮すると定性的に理解できる。相対論的電子からの光は、電子の進行方向を中心とした γ^{-1} の円錐に偏る。従って、アンジュレータ内の電子の傾き角 $\beta_{x,y}$ がパワーの空間分布を決定する。通常のアンジュレータでは $\beta_y = 0$、また $\beta_x = (K/\gamma)\cos(2\pi z/\lambda_u)$ であるから、垂直方向に $\sigma_{py'} = \gamma^{-1}$、水平方向には $\sigma_{px'} = \gamma^{-1}\sqrt{1+K^2}$（$\gamma^{-1}$ と $K\gamma^{-1}$ のコンボリュー

ション）という広がりを持つ。即ち、アンジュレータの周期数 N には依存しない。フラックスの角度発散は $\sigma_{r'} = \gamma^{-1}\sqrt{\frac{1+K^2/2}{4N}}$ で表されるから、N が大きいときには $\sigma_{r'} \ll \sigma_{px'}, \sigma_{px'}$ が成り立つ。

6　アンジュレータ放射の特徴・実用編

前節では、アンジュレータ放射光の特徴を理解するために定性的な説明を行った。実際に光を利用して実験する場合、光源についての定量的な知識が必要となる。これを厳密に行うためには複雑な数式を用いた数値計算が必要となるが、ここでは結果のみを示し、特に放射光を利用する上で有用な特性について説明する。

6.1　電子ビーム有限エミッタンス・エネルギー幅の影響

ここまでは単一電子からの放射光について考えてきた。実際には蓄積リングを周回する電子ビームは有限のサイズ･角度発散を持っており、放射光の性質に影響を与える。光の場合と同様に、ビームサイズと角度発散の積をエミッタンスと呼び、これが小さいほど質のよい電子ビームである。位置・角度が中心からずれた電子からの放射光を軸上の観測者が見ると、実効的に軸外放射を観測することになるが、有限エミッタンスによる影響は、この効果を電子ビーム全体にわたって積算したものとなる。また、電子ビームのエネルギーも決して単一ではなくある幅を持っており、これはスペクトル幅の広がりにつながる。具体的な例を図に示す。このように、エミッタンスやエネルギー幅が大きくなるにつれてピーク強度が下がり、かつピーク幅が広がるため、アンジュレータの利用にはエネルギー幅が小さく低エミッタンスな電子ビームが不可欠である。

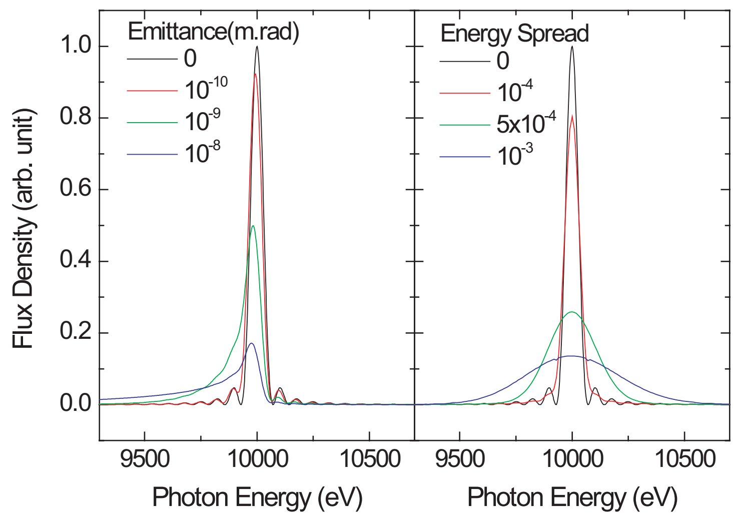

図 12: 有限エミッタンス・エネルギー幅の影響。

6.2　熱負荷とスリット

通常の放射光ビームラインにおいては、アンジュレータからの光ビームは分光器に入射する前にスリットで切り出されるが、これは前述した熱負荷を軽減するためのものである。例として、SPring-8 BL09XU において K=1.34（$\hbar\omega_1$=10 keV）となるようにギャップを設定した場合の、パワーと 10keV におけるフラックスの空間分布を光源から 30m の位置で計算したものを図 13 に示す。

このようにフラックスの角度発散はパワーのそれに比べてずっと小さいため、スリットサイズを図で示したように設定することで熱負荷を軽減し、ほとんど全てのフラックスを取り込むことができる。これは特に SPring-8 のような高エネルギー電子ビームを用いる放射光施設では重要である。一方ウィグラや偏向磁石の場合、ほとんどのエネルギー領域においてパワーとフラックスが同様な空間分布を示すため、このような方法は適用できない。

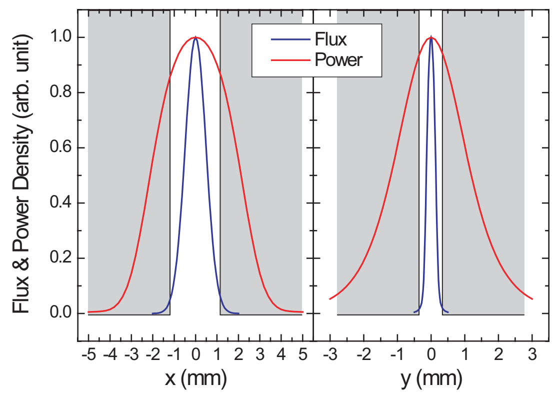

図 13: パワーとフラックスの空間分布。

6.3　光軸決定とスペクトル

ビームライン建設直後のコミッショニングにおける重要な課題の一つに、光軸決定がある。具体的には、前述のスリットの中心と光ビームの中心を一致させるということである。これには蛍光板を使った光ビームの直接観測や、光電板を使ったパワー分布の測定などが用いられるが、スペクトル測定を併用することでさらに精度の高い光軸決定を行うことができる。図 14 にスリット位置を変化させたときのスペクトル変化の計算例を示す。スリットは、これによる立体角の広がりが無視できる程度に絞っている。言い換えると、フラックスの空間密度についてのスペクトルを示している。軸を外したときにはフラックスが低下していること、また垂直方向ではピークの低エネルギー側へのシフトも確認することができる。水平方向に比べて垂直方向の方が軸決め精度が圧倒的に高いことが期待されるが、これは、蓄積リングにおける電子ビームの垂直方向のエミッタンスが水平方向のそれに比べてずっと小さいことに起因している。

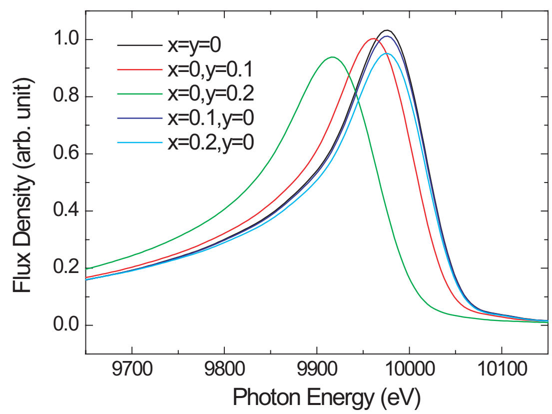

図 14: 軸外しによるスペクトルの影響。

このように、スペクトルの空間依存性を利用することによって精密な光軸決定を行うことが可能である。逆に、アンジュレータや蓄積リングの評価のためにスペクトルを測定する場合、光軸決定を精度よく行っておかないとこれらの性能を過小評価する可能性がある。

6.4　光源までの距離の影響

一般的に、シンクロトロン放射光の特性を計算する場合、光源と観測点の距離 R を無限大にとり、計算式を簡単にすることが多い。これを遠距離場近似 (Far Field Approximation) と呼ぶ。この近似が成り立つ条件は、挿入光源の全長を L とすれば $R \gg L$ であることは明らかである。SPring-8 においては $L = 4.5$ m、$R \sim 30$m であるから、上記条件が成り立っているかは微妙なところである。

図 15 に、さまざまな R について角度分布を厳密に計算した場合と、遠距離場近似を用いて計算した結果を示す。エネルギーは基本エネルギー (10keV) とわずかに低エネルギー側にシフトさせたところ (9.9keV) で固定している。。遠距離場近似、R=10 m 及び 30 m のそれぞれの結果に大きな違いはないことがわかる。しかしながら、R=3 m の場合には特に 9.9keV で違いが大きく、遠距離場近似を適用できないことがわかる。この結果から、$R \sim L$ が遠距離近似が適用できるか否かの基準になると考えられる。

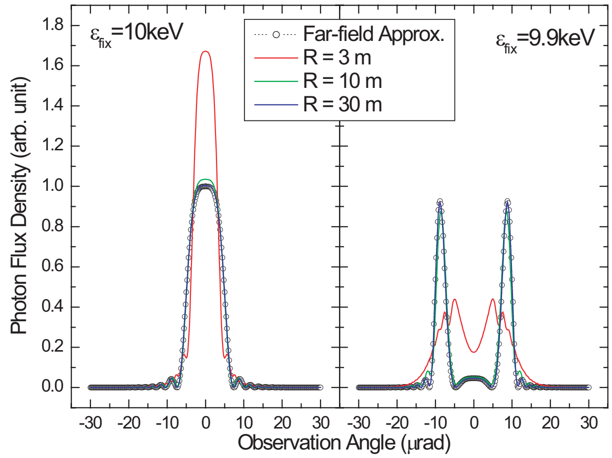

図 15: 有限エミッタンス・エネルギー幅の影響。

6.5 ウィグラ領域への移行

「挿入光源の分類」において、ウィグラ放射は偏向磁石放射を強度で積算したもの、アンジュレータ放射は振幅で積算したものという説明をした。ここではもう少し厳密な定義を行う。一般的な放射光科学の入門書を読むと、偏向定数 K を用いて、$K \gg 1$ の場合にウィグラ、その他の場合にアンジュレータと定義していることが多い。これは一見わかりやすいが誤解を生む定義方法である。

例として SPring-8 に全長 4.5m、周期長 12cm の通常型挿入光源を設置し $K = 10$ に設定したときに、光源から 30m の位置に設置された $3 \times 3\mathrm{mm}^2$ の矩形スリットを通過してくるフラックスのスペクトルを計算したものを図 16 に示す。K 値の大小によって定義する上記の方法に従えば、これは明らかにウィグラである。しかしながらスペクトルを見ると、100eV を基本エネルギーとした多数の高次光のピークが見られる。これはいままで述べてきたアンジュレータ放射そのものであり、各周期で放出された光の位相が一定の関係を有している（＝コヒーレント）ことを示している。従って、これらの低エネルギー領域の光を利用する場合、この挿入光源はアンジュレータと呼ぶべきである。一方、10keV 以上の高エネルギーにおいては、さきほどのようなピーク構造は消失し、白色スペクトルが見られる。これは偏向磁石放射のスペクトルに類似しており、このエネルギー領域では光の位相がバラバラであり、互いに全く相関がない（＝インコヒーレント）ことを示している。そして、これらのエネルギー領域における光をユーザが利用する場合に、この挿入光源をウィグラと呼ぶ。即ち、ウィグラからの放射光は偏向磁石放射をインコ

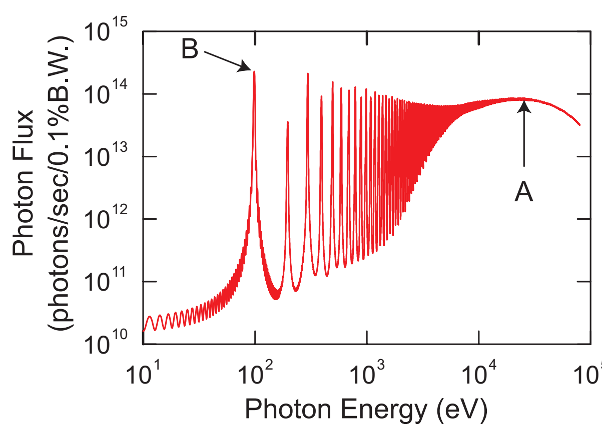

図 16: 挿入光源放射のウィグラ領域とアンジュレータ領域。

ヒーレントに足しあわせたものであるといえる。このようにウィグラとアンジュレータの定義は磁場強度によるものではなく、利用する光のコヒーレント性によるべきものである。もっとも、磁場が弱いときには白色スペクトルを形成する高エネルギー領域の光強度は小さくなるため、ウィグラとしての利用は実用的ではない。

上記は単なる呼称の問題であり、物理的には無意味であると思われる読者の方もおられるかもしれない。そこで、もう少し具体的な例として、光のピークエネルギーの磁場依存性について考えてみる。ウィグラ領域におけるピークエネルギー（図で矢印Aで示したエネルギー）は、ピーク磁場に対応する偏向磁石放射の臨界エネルギーに一致する。臨界エネルギーは磁場に比例するため、磁場が強くなるとウィグラ放射光のピークは高エネルギー側にシフトする。一方、アンジュレータ領域におけるピークエネルギー（同図で矢印Bで示したエネルギー）は式 (7) で示したように K 値の減少関数となるため、磁場が強くなるとピークは低エネルギー側にシフトする。即ち、この挿入光源のギャップを閉じて磁場を増加させた場合、ウィグラ領域に対応するピークは高エネルギー側にシフトする一方、アンジュレータ領域に対応するピークは低エネルギー側にシフトする。

7　おわりに

挿入光源放射にはここで取り上げた項目以外にも重要な特性がある。特に偏光特性は重要であって、これを用いた実験をする際には光源の偏光度などを知っておく必要がある。また、挿入光源が電子ビームに与える影響も重要な問題であり、蓄積リングの安定性を確保するためにはこの影響を最小限に抑えなくてはならない。逆に、電子ビームが発生する放射線による永久磁石の減磁に対する対策も必要であるが、SPring-8 では現在までのところ運転に支障をきたすほどの大きな問題は生じていない。（一方、アメリカの Advanced Photon Source で蓄積リングに設置されたアンジュレータのうち、数台が大きく減磁し交換した事例がある。）

アンジュレータ開発における最近のトレンドとして短周期化をあげることができる。特に超伝導コイルを用いた短周期アンジュレータが最近の流行であるが、電子ビームがもたらす熱負荷の環境下での極低温維持や高次光強度を確保するための磁場調整の手法など未知数の部分が多い。一方、最近 SPring-8 で永久磁石を 140K 程度まで冷却することにより、残留磁束密度（ピーク磁場）及び保磁力（耐放射線減磁）を改善し、短周期アンジュレータの開発に応用する手法が提案され、その手法の簡便さから注目されている。