SPring-8の各種放射光光源に関する講習会報告

大阪大学 産業科学研究所
江村　修一

1993年10月8日(金)に埼玉県和光市の 理化学研究所 鈴木梅太郎記念ホール において、SPring-8のビームライン建設に不可欠な放射光光源のスペクトル計算に関して、SPring-8利用者懇談会、大型放射光施設計画推進共同チーム及び(財)高輝度光科学研究センターの共催で、表記の講習会が開催された。SPring-8利用者懇談会では、ビームライン計画の参考にしてもらうため、各サブグループから１名の参加者に旅費を支給した。講習会は10:00開始の予定であったが、少し集まりが悪く15分程度遅れて始まった。参加者は３８名であった。講師の北村英男先生(共同チーム)の予想では、相当数のパソコン持ち込みがあるだろうと思われていたが、実際は４～５台しか持ち込まれなかったので、理研の研究室等から急きょ数台の搬入があり、最終的には３～５名につき１台程度になり、パソコンのまわりを囲むような形で進んでいった。会場で放射光スペクトル計算プログラムSRCPV.2.2(従来配布されたのはV.2.1)のディスクが貸し出され、パソコンを持ち込んだ人は直ちにインストールをした。新Versionは、フォーマットしたFD(2HD,3.5"が適当)を北村先生宛に送付するとコピーして返却して下さるということである。

早速、各自が画面にメニューを出し、スクリーン上に写し出されたメニューと見比べながら、北村先生より一つ一つの項目についてどのような計算及び機能があるのかの概略の説明を受けた。次に、配布されたプリントに従って電子ビームのエミッタンス、ビームサイズ、角度発散、エネルギー幅や各種のパラメータなどの放射光に関する予備知識の講義が小一時間程度なされた。

その後は、当日配布された SRCP V.2.2 の実習に移り、昼食をはさみ４時頃まで偏向部放射の各種計算、アンジュレーター放射の各種計算、ウイグラー放射の各種計算の順番で、実際の計算を行いながら進められた。計算結果に対して、グラフによりスペクトル等が出されるので、結構楽しいものであった。

パソコンによりスピードの違いがあり、その差は100倍位はあったのではないだろうか。北村先生の持ち込んだパソコンは早く、私達の持ち込んだものより20倍程度は早かったようである。そのため実習は、当初は一番遅いパソコンに合わせて行われた。偏向部での比較的単純な所ではそれでよかったが、アンジュレータ放射での多重積分を含むような所に移って行くと、一つの計算に遅い所では数時間か或いは数十時間もかかってしまうことになり、これでは講習会ということにもならず、北村先生のパソコンについていける者だけということになった。私達はそれに対して、計算点数を約1/10に減らして対応し、何とか最終のグラフを出す所まで持っていくことができた。このプログラムは膨大なもので、使いこなすには少し時間がかかりそうであるが、この講習会のおかげで、実際の放射光の様子が実感できた。

なお、当日配布された放射光スペクトル公式集は、多くの方の参考になると思われるので次頁以降に掲載されている。

付録．放射光スペクトル公式集

Ｖ１．１（'92/12/28）

ＫＥＫ・北村英男

特に断らない限り，ＭＫＳ（ＳＩ）単位系を使用している。

Ａ．１．重要公式

$\beta = v / c \fallingdotseq 1$ と仮定する．

●基本的な物理定数

真空中での光速	$c = 2.99792458 \times 10^{8}$ m
電子の質量	$m = 9.109389754 \times 10^{-31}$ kg
電子の静止エネルギー	$mc^2 = 0.510999066$ MeV
素電荷	$e = 1.6021773349 \times 10^{-19}$ C
プランク定数	$\hbar = 1.0545726663 \times 10^{-34}$ J·S
真空の誘電率	$\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}$ F/m
真空の透磁率	$\mu_0 = 1.256637060 \times 10^{-6}$ H/m

●ローレンツ因子

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E}{mc^2} = 195[illegible].95074 E_{\mathrm{G.V}} \qquad \text{(A.1.1)}$$

$$\beta \fallingdotseq 1 - \gamma^{-2}/2 \qquad \text{(A.1.2)}$$

●ローレンツ短縮

$$L = L_0 \gamma^{-1} \qquad \text{(A.1.3)}$$

●ドップラー効果

$$\omega = \frac{\gamma^{-1}\omega'}{1-\beta\cos\theta}, \qquad \tan\theta = \frac{\gamma^{-1}\sin\theta'}{\cos\theta' + \beta} \qquad \text{(A.1.4)}$$

軸上（$\theta = 0$）では

$$\omega = \frac{\gamma^{-1}\omega'}{1-\beta} \fallingdotseq \frac{\gamma^{-1}\omega'}{1-(1-\gamma^{-2}/2)} = 2\gamma\omega' \qquad \text{(A.1.5)}$$

●軌道半径

$$\rho = \frac{E}{ecB} \text{ (MKS)} = 3.335641 \frac{E_{\mathrm{G.V}}}{B} \text{ (m)} = 1.7045094 \times 10^{-3} \frac{\gamma}{B} \text{ (m)} \qquad \text{(A.1.6)}$$

●Ｆｏｕｒｉｅｒ変換

定義

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \text{逆変換は} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \qquad \text{(A.1.7)}$$

各種公式

$$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \Rightarrow \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega) \qquad \text{(A.1.8)}$$

$$f^{(n)}(t) \Rightarrow (i\omega)^n F(\omega), \quad \iiint \cdots \iint f(t)(dt)^n \Rightarrow (i\omega)^{-n} F(\omega) \qquad \text{(A.1.9)}$$

$$f(at) \Rightarrow \frac{1}{|a|} F(a\omega), \qquad f(t-a) \Rightarrow \exp(-i\omega a) F(\omega) \qquad \text{(A.1.10)}$$

$$\exp(\pm i\omega_0 t) f(t) \Rightarrow F(\omega \mp \omega_0) \qquad \text{(A.1.11)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(t-\xi) d\xi \Rightarrow F_1(\omega) F_2(\omega), \quad f_1(t) f_2(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\xi) F_2(\omega-\xi) d\xi \qquad \text{(A.1.12)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \qquad (f : \text{real}) \qquad \text{(A.1.13)}$$

●相対論的電子の放射場とそのＦｏｕｒｉｅｒ変換

放射場は

$$E = \frac{e n \times [(n-\beta) \times \dot{\beta}]}{4\pi\varepsilon_0 c R (1 - n\cdot\beta)^3} \quad \text{(MKS)} \qquad \text{(A.1.14)}$$

Ｐｏｙｎｔｉｎｇベクトル

$$S = E \times H, \quad |S| = c\varepsilon_0 |E|^2 \qquad \text{(A.1.15)}$$

単位立体角あたりの放射パワーは

$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2 |S| = c\varepsilon_0 |RE|^2 \qquad \text{(A.1.16)}$$

$F = RE$ のＦｏｕｒｉｅｒ変換

$$F(\omega) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n \times [(n-\beta) \times \dot{\beta}]}{(1 - n\cdot\beta)^3} e^{-i\omega t} dt \qquad \text{(A.1.17)}$$

遠方場（$R\to\infty$）近似では n は一定とみなせるので

$$R(t') \fallingdotseq R_0 - n\cdot r(t'),\quad t = t' + R(t')/c \fallingdotseq t' - n\cdot r(t')/c + R_0/c \tag{A.1.18}$$

また，

$$dt = (1 - n\cdot\beta)dt' \tag{A.1.19}$$

したがって，

$$F(\omega) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n\times[(n-\beta)\times\dot{\beta}]}{(1-n\cdot\beta)^2}\exp[-i\omega(t'-n\cdot r/c)]dt' \tag{A.1.20}$$

さらに，n が一定の場合，

$$\frac{n\times[(n-\beta)\times\dot{\beta}]}{(1-n\cdot\beta)^2} = \frac{d}{dt'}\left[\frac{n\times(n\times\beta)}{1-n\cdot\beta}\right] \tag{A.1.21}$$

したがって，部分積分により，

$$F(\omega) = \frac{i\omega e}{4\pi\varepsilon_0 c}\, n\times\left[n\times\int_{-\infty}^{\infty}\beta\exp[-i\omega(t'-n\cdot r/c)]dt'\right] \tag{A.1.22}$$

スペクトルは

$$\frac{d^2P}{d\Omega d\omega} = \frac{c\varepsilon_0}{\pi}|F(\omega)|^2 \tag{A.1.23}$$

● Ｂｅｓｓｅｌ関数

定義

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \tag{A.1.24}$$

各種公式

$$J_{n+1}(z) + J_{n-1}(z) = \frac{2n}{z}J_n(z),\quad J_{n+1}(z) - J_{n-1}(z) = -2J'_n(z) \tag{A.1.25}$$

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \tag{A.1.26}$$

$$\exp(ix\sin\alpha) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp(ik\alpha)J_k(x) \tag{A.1.27}$$

Ｂｅｓｓｅｌ関数の積分表示

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\exp[i(n\eta - z\sin\eta)]d\eta,\quad J'_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\sin\eta\exp[i(n\eta - z\sin\eta)]d\eta \tag{A.1.28}$$

$$J_n(nu) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos[n(\eta - u\sin\eta)]d\eta \tag{A.1.29}$$

Ａｉｒｙ関数と変形ベッセル関数

$$A_i(z) = \frac{(3\alpha)^{1/3}}{\pi}\int_0^{\infty}\cos[\alpha t^3 + (3\alpha)^{1/3}zt]dt \tag{A.1.30}$$

$$K_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) = \pi\sqrt{\frac{3}{z}}A_i(z),\quad K_{2/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{z}A'_i(z) \tag{A.1.31}$$

● 円軌道の放射損失

$$P = \left(\frac{2}{3}\right)\frac{e^2c\gamma^4}{4\pi\varepsilon_0\rho^2}\ \text{(J/sec)} \tag{A.1.32}$$

$$= 4.2208606\times10^{12}\frac{E^4_{G\,eV}}{\rho^2}\ \text{(eV/sec)} = 0.2877938\frac{\gamma^4}{\rho^2}\ \text{(eV/sec)} \tag{A.1.33}$$

$$= 3.7935203\times10^{11}E^2_{G\,eV}B^2\ \text{(eV/sec)} = 9.9056419\times10^4\gamma^2B^2\ \text{(eV/sec)} \tag{A.1.34}$$

● 直線加速の放射損失

$$P = \left(\frac{2}{3}\right)\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m^2c^3}\left(\frac{dE}{ds}\right)^2\ \text{(J/sec)} = 1.1021513\left(\frac{dE_{M\,eV}}{ds}\right)^2\ \text{(eV/sec)} \tag{A.1.35}$$

● 臨界波長，臨界エネルギー

$$\lambda_c = \frac{4\pi\rho}{3\gamma^3} = 4.1887902\times10^{10}\frac{\rho}{\gamma^3}\ (\text{Å}) = 5.5891907\frac{\rho}{E^3_{G\,eV}}\ (\text{Å}) \tag{A.1.36}$$

$$\varepsilon_c = \frac{12398.4247}{\lambda_c}\ \text{(eV)} = 2218.2862\frac{E^3_{G\,eV}}{\rho}\ \text{(eV)} \tag{A.1.37}$$

● 偏向定数

通常型挿入光源の周期磁場 $B=B_0\sin(2\pi s/\lambda_u)$ では

$$K = \frac{eB_0\lambda_u}{2\pi mc} = 93.3728744B_0\lambda_u \quad \text{(MKS)} \tag{A.1.38}$$

円偏光型挿入光源の周期磁場 $B = iB_{x0}\sin(2\pi s/\lambda_u) + jB_{y0}\cos(2\pi s/\lambda_u)$ では

$$K_{x,y} = 93.3728744B_{x0,y0}\lambda_u \quad \text{(MKS)} \tag{A.1.39}$$

●アンジュレータの放射波長、光子エネルギー（ゼロエミッタンス）

通常型挿入光源では，磁場周期長をλ_uとすると，n次高調波について

$$\lambda_n = \frac{\lambda_u}{2n\gamma^2}\left(1+\frac{K^2}{2}+\gamma^2\theta^2\right) = 1305.6\frac{\lambda_u}{nE_{G\cdot V}^2}\left(1+\frac{K^2}{2}+\gamma^2\theta^2\right) \quad (\text{Å}) \tag{A.1.40}$$

$$\hbar\omega = \frac{4\pi\hbar cn\gamma^2}{\lambda_u(1+\gamma^2\theta^2+K^2/2)} = 9.49634\frac{nE_{G\cdot V}^2}{\lambda_u(1+\gamma^2\theta^2+K^2/2)} \quad \text{(eV)} \tag{A.1.41}$$

円偏光型挿入光源では

$$\lambda_n = \frac{\lambda_u}{2n\gamma^2}\left(1+\frac{K_x^2+K_y^2}{2}+\gamma^2\theta^2\right) \tag{A.1.42}$$

ただし，ヘリカルアンジュレータでは $K=K_x=K_y$.

●エミッタンス、ベータートロン関数

$$\pi\varepsilon_x = \gamma_x x^2 + 2\alpha_x xx' + \beta_x x'^2 \tag{A.1.43}$$

$$\alpha_x = -\beta'/2, \quad \gamma_x = (1+\alpha_x^2)/\beta_x \tag{A.1.44}$$

●エミッタンスカップリング

$$\varepsilon_y = k\varepsilon_x, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_x + \varepsilon_y \tag{A.1.45}$$

●電子ビームサイズ、電子ビーム角度発散

ηを分散関数，σ_E/Eを相対エネルギー幅とすると，

$$\sigma_x = \sqrt{\beta_x\varepsilon_x + (\sigma_E/E)^2\eta^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\beta_y\varepsilon_y} \tag{A.1.46}$$

$$\sigma_{x'} = \sqrt{\frac{(1+\alpha_x^2)\varepsilon_x}{\beta_x} + (\sigma_E/E)^2\eta'^2}, \quad \sigma_{y'} = \sqrt{\frac{(1+\alpha_y^2)\varepsilon_y}{\beta_y}} \tag{A.1.47}$$

$$\sigma_{x,y}\sigma_{x',y'} \geqq \varepsilon_{x,y} \quad (\text{等号は}\alpha_{x,y} = 0\text{ のとき}) \tag{A.1.48}$$

●光強度単位系の変換

全光束

$$\frac{dP}{d\omega}\ \text{(J/sec/electron)} \times \frac{I_b(A)}{e\hbar\omega/\omega}/10^3 = \frac{dN}{d\omega/\omega}\ \text{(photons/sec/0.1\%b.w.)} \tag{A.1.49}$$

光束密度

$$\frac{d^2P}{d\Omega d\omega}\ \text{(J/sec/rad}^2\text{/electron)} \times \frac{I_b(A)}{e\hbar\omega/\omega}/10^9 = \frac{d^2N}{d\Omega d\omega/\omega}\ \text{(photons/sec/mrad}^2\text{/0.1\%b.w.)} \tag{A.1.50}$$

A．2．偏向部の放射

ψを垂直方向の観測角とする。

A．2．1．偏向部の放射パワー

●全放射パワー

$$P_T = \frac{2\pi\rho I_b}{ec}P = 88.462697\frac{E_{G\cdot V}^4 I_b}{\rho} \quad \text{(kW)} \tag{A.2.1}$$

●放射パワー線密度

$$\frac{dP}{d\theta_x} = 0.014079275\frac{E_{G\cdot V}^4 I_b}{\rho} \quad \text{(kW/mrad)} \tag{A.2.2}$$

●放射パワーの角度発散

自然角度発散

$$\sigma_{pwy} \fallingdotseq 0.546\gamma^{-1} \tag{A.2.3}$$

実効角度発散

$$\Sigma_{pwy} \fallingdotseq \sqrt{\sigma_{pwy}^2 + \sigma_{y'}^2} \tag{A.2.4}$$

●放射パワー密度

自然放射パワー密度

$$\frac{dP(\psi)}{d\Omega} = \frac{7e\gamma^5 I_b f_{pb}}{64\pi\varepsilon_0\rho} = \frac{0.01808129E_{G\cdot V}^5 I_b f_{pb}(\gamma\psi)}{\rho} \quad \text{(kW/mrad}^2\text{)} \tag{A.2.5}$$

$$f_{pb}(v)=\frac{1}{(1+v^2)^{5/2}}+\frac{5v^2}{7(1+v^2)^{7/2}} \tag{A.2.6}$$

実効放射パワー密度

$$\left[\frac{dP(\psi)}{d\Omega}\right]_{eff}=\frac{0.01808129E_{G\cdot V}^{5}I_b/\rho}{\sqrt{2\pi}\,\gamma\,\sigma_{y'}}\int_{-\infty}^{\infty}f_{pb}(v)\exp\left(\frac{-(v-\gamma\psi)^2}{2\gamma^2\sigma_{y'}^2}\right)dv \quad (\mathrm{kW/mrad^2}) \tag{A.2.7}$$

軌道面内（$\psi=0$）では近似的に

$$\left[\frac{dP(0)}{d\Omega}\right]_{eff}\fallingdotseq\frac{dP(0)}{d\Omega}\frac{\sigma_{pwy}}{\Sigma_{pwy}} \tag{A.2.8}$$

A.2.2.偏向部のスペクトル強度

●光束の角度発散と光源サイズ

自然角度発散

$\sigma_{r'}\fallingdotseq 0.565\gamma^{-1}(\lambda/\lambda_c)^{0.425}$ （Greenの近似式） (A.2.9)

$\sigma_{r'}\fallingdotseq 0.597\gamma^{-1}\sqrt{\lambda/\lambda_c}\fallingdotseq 0.292\sqrt{\lambda/\rho\gamma^{-1}}$ （Kitamuraの近似式） (A.2.10)

自然光源サイズ

$\sigma_r\sigma_{r'}=\lambda/4\pi$ より，Kitamuraの近似式を使って

$$\sigma_r\fallingdotseq 0.273\sqrt{\lambda\rho\gamma^{-1}} \tag{A.2.11}$$

実効角度発散

$$\Sigma_{y'}\fallingdotseq\sqrt{\sigma_{r'}^2+\sigma_{y'}^2} \tag{A.2.12}$$

実効光源サイズ

全水平取り込み角を$\Delta\theta$とすると近似的に

$$\Sigma_x\fallingdotseq\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_r^2+\left(\frac{\rho(\Delta\theta)^2}{16}\right)^2},\quad \Sigma_y\fallingdotseq\sqrt{\sigma_y^2+\sigma_r^2+\left(\frac{\rho\Delta\theta\sigma_{r'}}{2}\right)^2} \tag{A.2.13}$$

●光束密度

自然光束密度

$$\frac{d^2P}{d\Omega d\omega}=\frac{3e^2\gamma^2}{16\pi^3\varepsilon_0 c}[F_\parallel(\omega/\omega_c,\gamma\psi)+F_\perp(\omega/\omega_c,\gamma\psi)] \quad (\mathrm{J/sec/rad^2/electron}) \tag{A.2.14}$$

$$F_\parallel(u,v)=[u(1+v^2)K_{2/3}(\xi)]^2 \tag{A.2.15}$$

$$F_\perp(u,v)=(1+v^2)[uvK_{1/3}(\xi)]^2 \tag{A.2.16}$$

$$\xi=(1+v^2)^{3/2}u/2 \tag{A.2.17}$$

実用単位では

$$\frac{d^2N(\omega,\psi)}{d\Omega d\omega/\omega}=1.3254889\times10^{13}E_{G\cdot V}^2 I_b[F_\parallel+F_\perp] \quad (\mathrm{photons/s/mrad^2/0.1\%b.w.}) \tag{A.2.18}$$

軌道面内（$\psi=0$）では

$$D_0\doteq 1.3254889\times10^{13}I_b[(\omega/\omega_c)E_{G\cdot V}K_{2/3}(\omega/\omega_c)]^2 \quad (\mathrm{photons/s/mrad^2/0.1\%b.w.}) \tag{A.2.19}$$

実効光束密度と偏光度

$$\left[\frac{d^2N(\omega,\psi)}{d\Omega d\omega/\omega}\right]_{eff}=1.3254889\times10^{13}E_{G\cdot V}^2 I_b\frac{S_{xx}+S_{yy}}{\sqrt{2\pi}\,\gamma\,\sigma_{y'}} \quad (\mathrm{photons/s/mrad^2/0.1\%b.w.}) \tag{A.2.20}$$

直線偏光度と円偏光度は

$$P_L=\frac{S_{xx}-S_{yy}}{S_{xx}+S_{yy}},\quad P_c=\frac{2S_{xy}}{S_{xx}+S_{yy}} \tag{A.2.21}$$

ただし，

$$S_{xx}=\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}dv[(1+v^2)K_{2/3}(\xi)]^2\exp\left(\frac{-(v-\gamma\psi)^2}{2\gamma^2\sigma_{y'}^2}\right) \tag{A.2.22}$$

$$S_{yy}=\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}dv(1+v^2)[vK_{1/3}(\xi)]^2\exp\left(\frac{-(v-\gamma\psi)^2}{2\gamma^2\sigma_{y'}^2}\right) \tag{A.2.23}$$

$$S_{xy}=\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}dv\,v(1+v^2)^{3/2}K_{1/3}(\xi)K_{2/3}(\xi)\exp\left(\frac{-(v-\gamma\psi)^2}{2\gamma^2\sigma_{y'}^2}\right) \tag{A.2.24}$$

$$\xi=\omega(1+v^2)^{3/2}/2\omega_c \tag{A.2.25}$$

軌道面内（$\psi=0$）では

$$D=\left[\frac{d^2N(\omega,0)}{d\Omega d\omega/\omega}\right]_{eff} \tag{A.2.26}$$

あるいは近似的に

$$D \fallingdotseq D_0\frac{\sigma_{r'}}{\Sigma_{r'}} \tag{A.2.27}$$

●輝度（軌道面内）

$$B=\frac{D}{2\pi\Sigma_x\Sigma_y} \tag{A.2.28}$$

●部分光束

受光角$\Delta\theta$（軌道面内）に入射する光束は，

$$\frac{dP(\omega)}{d\omega}=\frac{\sqrt{3}e^2\gamma(\omega/\omega_c)}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\Delta\theta}{2\pi}\int_{\omega/\omega_c}^{\infty}K_{5/3}(u)du \quad \text{(J/sec/electron)} \tag{A.2.29}$$

実用単位では

$$F(\omega)=\frac{dN(\omega)}{d\omega/\omega}=1.543815\times10^{17}I_b E_{G\cdot V}(\omega/\omega_c)\frac{\Delta\theta}{2\pi}\int_{\omega/\omega_c}^{\infty}K_{5/3}(u)du \quad \text{(photons/s/0.1\%b.w.)} \tag{A.2.30}$$

当然ながら$\Delta\theta=2\pi$のとき全光束となる。

A．3．通常型アンジュレータの放射

θをビーム軸からの傾き，ϕを方位角とする。したがって，

$x'=\theta_x=\theta\cos\phi$,　$y'=\theta_y=\theta\sin\phi$

A．3．1．通常型アンジュレータの放射パワー

●全放射パワー

$$P_T=\frac{I_b}{ec}\int_0^{N\lambda_u}Pds \tag{A.3.1}$$

$$=0.31634554(2N-1)\lambda_u E_{G\cdot V}^2 B_0^2 I_b\ \text{(kW)}=3.6284427\times10^{-5}(2N-1)E_{G\cdot V}^2K^2I_b/\lambda_u\ \text{(kW)} \tag{A.3.2}$$

●放射パワー密度

自然パワー密度（Kimの式）

$$\frac{dP(\theta_x,\theta_y)}{d\Omega}=\frac{dP(0,0)}{d\Omega}f_{pb}(\gamma\theta_x,\gamma\theta_y) \tag{A.3.3}$$

$$f_{pb}(u,v)=\frac{16K}{7\pi G(K)}\int_{-\pi}^{\pi}d\alpha\left[\frac{1}{Q^3}-\frac{4(u-K\cos\alpha)}{Q^5}\right]\sin^2\alpha, \tag{A.3.4}$$

$$Q=1+v^2+(u-K\cos\alpha)^2 \tag{A.3.5}$$

ただし，軸上（$\theta=0$）のパワー密度

$$\frac{dP(0,0)}{d\Omega}=P_T\frac{21\gamma^2}{16\pi K}G(K)=5.80536447\times10^{-3}(2N-1)E_{G\cdot V}^4KG(K)I_b/\lambda_u \quad \text{(kW/mrad}^2\text{)} \tag{A.3.6}$$

$$G(K)=\frac{K^7+\frac{24}{7}K^5+4K^3+\frac{16}{7}K}{(1+K^2)^{7/2}} \tag{A.3.7}$$

実効パワー密度

$$\left[\frac{dP(\theta x,\theta_y)}{d\Omega}\right]_{eff}=\frac{\frac{dP(0,0)}{d\Omega}}{2\pi\gamma\sigma_{x'}\gamma\sigma_{y'}}\int_{-\infty}^{\infty}dv\int_{-\infty}^{\infty}du\ f_{pb}$$

$$\times\exp\left(\frac{-(u-\gamma\theta_x)^2}{2\gamma^2\sigma_{x'}^2}+\frac{-(v-\gamma\theta_y)^2}{2\gamma^2\sigma_{y'}^2}\right) \quad \text{(kW/mrad}^2\text{)} \tag{A.3.8}$$

A.3.2.通常型アンジュレータのスペクトル強度

●光束の角度発散，光源サイズ

自然角度発散

$$\sigma_{r'} \fallingdotseq \sqrt{\frac{\lambda_n}{N\lambda_u}} = \gamma^{-1}\sqrt{\frac{1+K^2/2}{2nN}} \tag{A.3.9}$$

自然光源サイズ

$\sigma_r \sigma_{r'} = \lambda/4\pi$ より，

$$\sigma_r \fallingdotseq \frac{\sqrt{N\lambda_u \lambda_n}}{4\pi} \tag{A.3.10}$$

実効角度発散

$$\Sigma_{x'} = \sqrt{\sigma_{r'}^2 + \sigma_{x'}^2}\ , \quad \Sigma_{y'} = \sqrt{\sigma_{r'}^2 + \sigma_{y'}^2} \tag{A.3.11}$$

実効光源サイズ

$$\Sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_r^2}\ , \quad \Sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_r^2} \tag{A.3.12}$$

●光束密度

自然光束密度

$$\frac{d^2P_n}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2\gamma^2}{4\pi\varepsilon_0 c}N^2(f_x^2 + f_y^2) \quad \text{(J/sec/rad}^2\text{/electron)} \tag{A.3.13}$$

ただし，

$$f_x(\gamma\theta, \phi) = \xi[2S_0\gamma\theta\cos\phi - K(S_1 + S_{-1})]\frac{\sin(N\pi\omega/\omega_1)}{N\pi(\omega/\omega_1 - n)} \tag{A.3.14}$$

$$f_y(\gamma\theta, \phi) = 2\xi S_0\gamma\theta\sin\phi\frac{\sin(N\pi\omega/\omega_1)}{N\pi(\omega/\omega_1 - n)} \tag{A.3.15}$$

$$S_q = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n+2p+q}(X)J_p(Y), \quad X = 2K\xi\gamma\theta\cos\phi, \quad Y = K^2\xi/4 \tag{A.3.16}$$

$$\xi = \frac{n}{1+(\gamma\theta)^2+K^2/2}, \quad \omega_1 = \frac{4\pi c\gamma^2/\lambda_u}{1+(\gamma\theta)^2+K^2/2} \tag{A.3.17}$$

実用単位では

$$\frac{d^2N_n(\omega, \theta, \phi)}{d\Omega d\omega/\omega} = 1.7442734\times10^{14}E_{GeV}^2 I_b N^2[f_x^2 + f_y^2] \quad \text{(photons/s/mrad}^2\text{/0.1\%b.w.)} \tag{A.3.18}$$

軸上（$\theta=0$）では奇数次高調波に対して

$$D_{0n} = 1.7442734\times10^{14}I_b E_{GeV}^2 N^2 G_n(K) \quad \text{(photons/s/mrad}^2\text{/0.1\%b.w.)} \tag{A.3.19}$$

$$G_n(K) = K^2\xi_0^2\left[J_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{K^2\xi_0}{4}\right) - J_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{K^2\xi_0}{4}\right)\right]^2 \tag{A.3.20}$$

$$\xi_0 = n/(1+K^2/2) \tag{A.3.21}$$

実効光束密度

$$\left[\frac{d^2N_n(\omega, \theta, \phi)}{d\Omega d\omega/\omega}\right]_{eff} = 1.7442734\times10^{14}E_{GeV}^2 I_b N^2\frac{S_{xx} + S_{yy}}{2\pi\gamma\sigma_{x'}\gamma\sigma_{y'}} \quad \text{(photons/s/mrad}^2\text{/0.1\%b.w.)} \tag{A.3.22}$$

直線偏光度は

$$P_L = \frac{S_{xx} - S_{yy}}{S_{xx} + S_{yy}} \tag{A.3.23}$$

ただし，

$$S_{xx,yy} = \int_0^\infty udu\int_{-\pi}^{\pi}d\alpha f_{x,y}(u,\alpha)\exp\left(\frac{-(u\cos\alpha - \gamma\theta\cos\phi)^2}{2\gamma^2\sigma_{x'}^2} + \frac{-(u\sin\alpha - \gamma\theta\sin\phi)^2}{2\gamma^2\sigma_{y'}^2}\right) \tag{A.3.24}$$

軸上（$\theta=0$）における各高調波のピーク値は近似的に

$$D_n \fallingdotseq D_{0n}\frac{\sigma_{r'}^2}{\Sigma_{x'}\Sigma_{y'}} \tag{A.3.25}$$

●輝度（軸上）

$$B_n = \frac{D_n}{2\pi \Sigma_x \Sigma_y} \tag{A.3.26}$$

●全光束

$$\frac{dN_n(\omega)}{d\omega/\omega} = \int_0^{\infty} \theta d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \frac{d^2N_n(\omega,\theta,\phi)}{d\Omega d\omega/\omega} \tag{A.3.27}$$

各高調波のピーク値は近似的に

$$F_n = 2\pi \sigma_r^2 \cdot D_{on} \tag{A.3.28}$$

$$= 1.4308847\times10^{14} I_b N K^2 \xi_o \left[J_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{K^2\xi_o}{4}\right) - J_{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{K^2\xi_o}{4}\right)\right]^2 \text{ (photons/s/0.1\%b.w.)} \tag{A.3.29}$$

A．4．楕円，ヘリカルアンジュレータ

ヘリカルアンジュレータの場合は、$K = K_x = K_y$とする。

A．4．1．楕円，ヘリカルアンジュレータの放射パワー

●全放射パワー

$$P_T = 0.31634554(2N-1)\lambda_u E_{G\cdot V}^2 (B_{xo}^2 + B_{yo}^2) I_b \text{ (kW)} \tag{A.4.1}$$

$$= 3.6284427\times10^{-5}(2N-1)E_{G\cdot V}^2 (K_x^2 + K_y^2) I_b/\lambda^u \text{ (kW)} \tag{A.4.2}$$

●放射パワー密度

自然パワー密度（Ｙａｍａｍｏｔｏの式）

$$\frac{dP(\theta x, \theta_y)}{d\Omega} = 4.2237825\times10^{-5}(2N-1)E_{G\cdot V}^4 (K_x^2 + K_y^2) f_{pb}(\gamma\theta_x, \gamma\theta_y) I_b/\lambda_u \text{ (kW/mrad}^2) \tag{A.4.3}$$

ただし，

$$f_{pb}(u,v) = \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \left(\frac{R_1}{Q^3} - \frac{R_2}{Q^5}\right) \tag{A.4.4}$$

$$R_1 = L_y^2 \sin^2\alpha + L_x^2 \cos^2\alpha,\quad R_2 = 4[L_y \sin\alpha (u - K_y\cos\alpha) - L_x\cos\alpha (v - K_x\sin\alpha)]^2 \tag{A.4.5}$$

$$Q = 1 + (v - K_x\sin\alpha)^2 + (u - K_y\cos\alpha)^2,\quad L_{x,y} = \frac{K_{x,y}}{\sqrt{K_x^2 + K_y^2}} \tag{A.4.6}$$

軸上（$\theta = 0$）では，

$$\frac{dP(0,0)}{d\Omega} = 4.2237826\times10^{-5}(2N-1)E_{G\cdot V}^4 (K_x^2 + K_y^2) F(K) I_{beam}(A)/\lambda_u \text{ (kW/mrad}^2) \tag{A.4.7}$$

ただし，

$$F(K) = \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \left(\frac{L_y^2\sin^2\alpha + L_x^2\cos^2\alpha}{Q^3} - \frac{\sin^2 2\alpha [L_y K_y + L_x K_x]^2}{Q^5}\right) \tag{A.4.8}$$

$$Q = 1 + K_x^2\sin^2\alpha + K_y^2\cos^2\alpha,\quad L_{x,y} = \frac{K_{x,y}}{\sqrt{K_x^2 + K_y^2}} \tag{A.4.9}$$

実効的パワー密度

$$\left[\frac{dP(\theta_x, \theta_y)}{d\Omega}\right]_{eff} = 4.2237826\times10^{-5}(2N-1)E_{G\cdot V}^4 (K_x^2 + K_y^2) F_{eff}(K) I_b/\lambda_u \text{ (kW/mrad}^2) \tag{A.4.10}$$

$$F_{eff}(K) = \frac{1}{2\pi\gamma\sigma_{x'}\gamma\sigma_{y'}} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} du\, f_{pb}(u,v) \exp\left(\frac{-(u-\gamma\theta_x)^2}{2\gamma^2\sigma_{x'}^2} + \frac{-(v-\gamma\theta_y)^2}{2\gamma^2\sigma_{y'}^2}\right) \tag{A.4.11}$$

A．4．2．楕円，ヘリカルアンジュレータのスペクトル強度

●光束の角度発散と光源サイズ

自然角度発散

$$\sigma_{r'} \fallingdotseq \sqrt{\frac{\lambda_n}{N\lambda_u}} \tag{A.4.12}$$

自然光源サイズ

$\sigma_r \sigma_{r'} = \lambda/4\pi$ より,

$$\sigma_r \fallingdotseq \frac{\sqrt{N\lambda_u \lambda_n}}{4\pi} \tag{A.4.13}$$

実効角度発散

$$\Sigma_{x'} = \sqrt{\sigma_{r'}^2 + \sigma_{x'}^2}, \quad \Sigma_{y'} = \sqrt{\sigma_{r'}^2 + \sigma_{y'}^2} \tag{A.4.14}$$

実効光源サイズ

$$\Sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_r^2}, \quad \Sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_r^2} \tag{A.4.15}$$

●光束密度

自然光束密度

$$\frac{d^2P_n}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2\gamma^2}{4\pi\varepsilon_0 c} N^2(f_x f_x^* + f_y f_y^*) \quad \text{(J/sec/rad}^2\text{/electron)} \tag{A.4.16}$$

ただし,

$$f_x(\gamma\theta, \phi) = \xi\left[2S_0\gamma\theta\cos\phi - K_y(S_1 + S_{-1})\right]\frac{\sin(N\pi\,\omega/\omega_1)}{N\pi(\omega/\omega_1 - n)} \tag{A.4.17}$$

$$f_y(\gamma\theta, \phi) = \xi\left[2S_0\gamma\theta\sin\phi - iK_x(S_1 - S_{-1})\right]\frac{\sin(N\pi\,\omega/\omega_1)}{N\pi(\omega/\omega_1 - n)} \tag{A.4.18}$$

$$S_q = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n+2p+q}(X)\, J_p(Y)\exp[-i(n+2p+q)\Phi], \quad \tan\Phi = \frac{K_x}{K_y}\tan\phi \tag{A.4.19}$$

$$X = 2\xi\gamma\theta\sqrt{K_y^2\cos^2\phi + K_x^2\sin^2\phi}, \quad Y = (K_y^2 - K_x^2)\xi/4 \tag{A.4.20}$$

$$\xi = \frac{n}{1+(\gamma\theta)^2+K_x^2/2+K_y^2/2}, \quad \omega_1 = \frac{4\pi c\gamma^2/\lambda_u}{1+(\gamma\theta)^2+K_x^2/2+K_y^2/2} \tag{A.4.21}$$

ヘリカルアンジュレータの場合, $K=K_x=K_y$だから,

$$X = 2K\xi\gamma\theta, \quad Y = 0 \tag{A.4.22}$$

したがって,

$$f_x = \frac{2\xi}{K}\left[J_n(X)\left(\frac{\gamma\theta}{K} - \frac{n}{X}\right)\cos\phi - iJ'_n(X)\sin\phi\right] \tag{A.4.23}$$

$$f_x = \frac{2\xi}{K}\left[J_n(X)\left(\frac{\gamma\theta}{K} - \frac{n}{X}\right)\sin\phi + iJ'_n(X)\cos\phi\right] \tag{A.4.24}$$

実用単位では

$$\frac{d^2N_n(\omega, \theta, \phi)}{d\Omega d\omega/\omega} = 1.7442734\times10^{14}E_{GeV}^2 I_b N^2(f_x f_x^* + f_y f_y^*) \quad \text{(photons/s/mrad}^2\text{/0.1\%b.w.)} \tag{A.4.25}$$

軸上($\theta=0$)では, 奇数次高調波に対して

$$D_{0n} = 1.7442734\times10^{14}E_{GeV}^2 I_b N^2 G_n(K_x, K_y) \quad \text{(photons/s/mrad}^2\text{/0.1\%b.w.)} \tag{A.4.26}$$

$$G_n(K_x, K_y) = \xi_0^2\left(K_y^2\left[J_{\frac{n-1}{2}}(Y_0) - J_{\frac{n+1}{2}}(Y_0)\right]^2 + K_x^2\left[J_{\frac{n-1}{2}}(Y_0) + J_{\frac{n+1}{2}}(Y_0)\right]^2\right) \tag{A.4.27}$$

$$\xi_0 = \frac{n}{1 + K_x^2/2 + K_y^2/2}, \quad Y_0 = \xi_0(K_x^2 - K_y^2)/4 \tag{A.4.28}$$

楕円軸比は

$$\left|\frac{E_y}{E_x}\right| = \frac{K_x}{K_y}\,\frac{J_{\frac{n-1}{2}}(Y_0) + J_{\frac{n+1}{2}}(Y_0)}{J_{\frac{n-1}{2}}(Y_0) - J_{\frac{n+1}{2}}(Y_0)} \tag{A.4.29}$$

ヘリカルアンジュレータの場合,

$$J_0(0) = 1, \quad J_k(0) = 0\ (k \neq 0) \tag{A.4.30}$$

光束密度と楕円軸比は

$$D_{e1} = 1.7442734\times10^{14} E_G^2 \cdot v/_b N^2 \frac{2K^2}{(1+K^2)^2} \quad (\text{photons/s/mrad}^2/0.1\%\text{b.w.}) \tag{A.4.31}$$

$$\left|\frac{E_y}{E_x}\right| = 1 \quad (\text{円偏光}) \tag{A.4.32}$$

実効光束密度

$$\left[\frac{d^2N_n(\omega,\theta,\phi)}{d\Omega d\omega/\omega}\right]_{eff} = 1.7442734\times10^{14} \frac{E_G^2 \cdot v/_b N^2 (S_{xx}+S_{yy})}{2\pi\gamma\sigma_{x'}\cdot\gamma\sigma_{y'}} \quad (\text{photons/s/mrad}^2/0.1\%\text{b.w.}) \tag{A.4.33}$$

直線偏光度と円偏光度は

$$P_L = \frac{S_{xx}-S_{yy}}{S_{xx}+S_{yy}}, \quad P_C = \frac{i(S_{xy}-S_{yx})}{S_{xx}+S_{yy}} \tag{A.4.34}$$

ただし,

$$S_{qr} = \int_0^\infty udu \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \; f_q(u,\alpha) f_r^*(u,\alpha) \times \exp\left(\frac{-(u\cos\alpha-\gamma\theta\cos\phi)^2}{2\gamma^2\sigma_{x'}^2} + \frac{-(u\sin\alpha-\gamma\theta\sin\phi)^2}{2\gamma^2\sigma_{y'}^2}\right) \tag{A.4.35}$$

軸上($\theta=0$)における各高調波のピーク値は近似的に

$$D_n \fallingdotseq D_{en} \frac{\sigma_{r'}^2}{\Sigma_{x'}\Sigma_{y'}} \tag{A.4.36}$$

●輝度(軸上)

$$B_n = \frac{D_n}{2\pi\Sigma_x\Sigma_y} \tag{A.4.37}$$

●全光束

$$\frac{dN_n(\omega)}{d\omega/\omega} = \int_0^\infty \theta d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \frac{d^2N_n(\omega,\theta,\phi)}{d\Omega d\omega/\omega} \tag{A.4.38}$$

各高調波のピーク値は近似的に

$$F_n = 2\pi\sigma_{r'}^2 D_{en} \tag{A.4.39}$$

$$= 1.4308847\times10^{14} I_b N G_n(K_x,K_y)\left[1+\frac{K_x^2+K_y^2}{2}\right]/n \quad (\text{photons/s/0.1\%b.w.}) \tag{A.4.40}$$

A.5.多極ウイグラーの放射

A.5.1.多極ウイグラーの放射パワー

通常型アンジュレータと同じである.

A.5.2.多極ウイグラーのスペクトル強度

●臨界波長,臨界エネルギー

$$\lambda_c = \frac{2\lambda_u}{3\gamma^2 K} = \frac{1.7408003\times10^3\lambda_u}{E_G^2 \cdot v K} \;(\text{Å}), \quad \hbar\omega_c = \frac{7.1222556 E_G^2 \cdot v K}{\lambda_u} \;(\text{eV}) \tag{A.5.1}$$

●光束の角度発散とサイズ

自然角度発散

$$\sigma_{rx'} \fallingdotseq 1.222K\gamma^{-1}\tanh(0.85\sqrt{\omega_c/\omega}) \quad (\omega_c/\omega<2) \tag{A.5.2}$$

$$\fallingdotseq K\gamma^{-1} \quad (\omega_c/\omega \geqq 2) \tag{A.5.3}$$

$$\sigma_{ry'} \fallingdotseq 0.597\gamma^{-1}\sqrt{\omega_c/\omega} \fallingdotseq 0.731\sqrt{K\lambda/\lambda_u} \quad (\text{Kitamuraの近似式}) \tag{A.5.4}$$

自然光源サイズ

$$\sigma_{rx} \fallingdotseq \sqrt{\sigma_r^2+(\sigma_{rx'}N\lambda_u/2)^2} + x_{max}, \quad \sigma_{ry} \fallingdotseq \sqrt{\sigma_r^2+(\sigma_{ry'}N\lambda_u/2)^2} \tag{A.5.5}$$

ただし，

$$x_{max} = \frac{K\lambda_u}{2\pi\gamma} \tag{A.5.6}$$

$\sigma_{r}, \sigma_{r'} = \lambda/4\pi$ より，Kitamuraの近似式を使って

$$\sigma_r \fallingdotseq 0.109\sqrt{\lambda\lambda_u/K} \tag{A.5.7}$$

実効角度発散

$$\Sigma_{x'} \fallingdotseq \sqrt{\sigma_{r'x'}^2+\sigma_{x'}^2}\ ,\quad \Sigma_{y'} \fallingdotseq \sqrt{\sigma_{r'y'}^2+\sigma_{y'}^2} \tag{A.5.8}$$

実効光源サイズ

$$\Sigma_x \fallingdotseq \sqrt{\sigma_x^2+\sigma_r^2+(\sigma_{r'x'} N\lambda_u/2)^2}+x_{max}\ ,\quad \Sigma_y \fallingdotseq \sqrt{\sigma_y^2+\sigma_r^2+(\sigma_{r'y'} N\lambda_u/2)^2} \tag{A.5.9}$$

●光束密度

自然光束密度

$$\frac{d^2N(\omega,\theta_x,\theta_y)}{d\Omega d\omega/\omega} = 1.3254889\times10^{13}(2N-1)E_{0}^2{}_{\bullet}\, v\, I_b$$

$$\times\left[F_\parallel(\omega/\omega_c^\#,\gamma\theta_y)+F_\perp(\omega/\omega_c^\#,\gamma\theta_y)\right] \text{(photons/s/mrad}^2\text{/0.1\%b.w.)} \tag{A.5.10}$$

$$F_\parallel(u,v) = \left[u(1+v^2)K_{2/3}(\xi)\right]^2 \tag{A.5.11}$$

$$F_\perp(u,v) = (1+v^2)\left[uvK_{1/3}(\xi)\right]^2 \tag{A.5.12}$$

$$\xi = (1+v^2)^{3/2}u/2,\qquad \omega_c^\# = \omega_c\sqrt{1-\left(\frac{\gamma\theta_x}{K}\right)^2} \tag{A.5.13}$$

実効光束密度

$$\left[\frac{d^2N(\omega,\theta_x,\theta_y)}{d\Omega d\omega/\omega}\right]_{eff} = 1.3254889\times10^{13}(2N-1)E_{0}^2{}_{\bullet}\, v\, I_b \frac{S_{xx}+S_{yy}}{2\pi\gamma\sigma_{x'}\gamma\sigma_{y'}}$$

$$\text{(photons/s/mrad}^2\text{/0.1\%b.w.)} \tag{A.5.14}$$

直線偏光度は

$$P_L = \frac{S_{xx}-S_{yy}}{S_{xx}+S_{yy}} \tag{A.5.15}$$

ただし，

$$S_{xx} = \int_{-K_y}^{K_y} du\left(\frac{\omega}{\omega_c^\#}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty} dv\left[(1+v^2)K_{2/3}(\xi)\right]^2\exp\left(\frac{-(u-\gamma\theta_x)^2}{2\gamma^2\sigma_{x'}^2}+\frac{-(v-\gamma\theta_y)^2}{2\gamma^2\sigma_{y'}^2}\right) \tag{A.5.16}$$

$$S_{yy} = \int_{-K_y}^{K_y} du\left(\frac{\omega}{\omega_c^\#}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty} dv(1+v^2)\left[vK_{1/3}(\xi)\right]^2\exp\left(\frac{-(u-\gamma\theta_x)^2}{2\gamma^2\sigma_{x'}^2}+\frac{-(v-\gamma\theta_y)^2}{2\gamma^2\sigma_{y'}^2}\right) \tag{A.5.17}$$

$$\xi = \omega(1+v^2)^{3/2}/2\omega_c^\#\ ,\qquad \omega_c^\# = \omega_c\sqrt{1-\left(\frac{u}{K}\right)^2} \tag{A.5.18}$$

軸上（$\theta=0$）では

$$D = \left[\frac{d^2N(\omega,0,0)}{d\Omega d\omega/\omega}\right]_{eff} \tag{A.5.19}$$

あるいは近似的に

$$D \fallingdotseq \frac{d^2N(\omega,0,0)}{d\Omega d\omega/\omega}\frac{\sigma_{r'y'}}{\Sigma_{r'y'}} \tag{A.5.20}$$

●輝度（軸上）

$$B=\frac{\frac{D}{2}\left[1+\exp\left(\frac{-(2x_{max})^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_r^2)}\right)\right]}{2\pi\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_r^2}\sqrt{\sigma_y^2+\sigma_r^2}} \quad (A.5.21)$$

●部分光束

受光角Δθ（軌道面内）に入射する光束は

$$F=1.543815\times10^{17}I_b E_{G,V}\frac{(2N-1)}{2\pi\gamma}\int_{-\gamma\Delta\theta/2}^{\gamma\Delta\theta/2}d\alpha\left(\frac{\omega}{\omega_c^*}\right)\int_{\omega/\omega_c^*}^{\infty}duK_{5/3}(u)\ \text{(photons/s/0.1\%b.w.)} \quad (A.5.22)$$

$$=7.88888\times10^{13}I_b\frac{(2N-1)}{2\pi}\int_{-\gamma\Delta\theta/2}^{\gamma\Delta\theta/2}d\alpha\left(\frac{\omega}{\omega_c^*}\right)\int_{\omega/\omega_c^*}^{\infty}duK_{5/3}(u)\ \text{(photons/s/0.1\%b.w.)} \quad (A.5.23)$$

$$\omega_c^*=\omega_c\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{K}\right)^2} \quad (A.5.24)$$

$\Delta\theta=2K\gamma^{-1}$とすると全光束となる。

A.6 楕円型多極ウイグラーの放射

A.6.1 楕円型多極ウイグラーの放射パワー

楕円アンジュレータと同じである.

A.6.2 楕円型多極ウイグラーのスペクトル強度

●臨界波長，臨界エネルギー

$$\lambda_c=\frac{1.7408003\times10^3\lambda_u}{E_{G,V}^2K_y}\ (\text{Å}),\qquad \hbar\omega_c=\frac{7.1222556E_{G,V}^2K_y}{\lambda_u}\ (\text{eV}) \quad (A.6.1)$$

●光束の角度発散と光源サイズ

自然角度発散

$$\sigma_{r,x'}\fallingdotseq1.222K_y\gamma^{-1}\tanh(0.85\sqrt{\omega_c/\omega})\qquad(\omega_c/\omega<2) \quad (A.6.2)$$

$$\fallingdotseq K_y\gamma^{-1}\qquad(\omega_c/\omega\geqq2) \quad (A.6.3)$$

$$\sigma_{r,y'}\fallingdotseq0.597\gamma^{-1}\sqrt{\omega_c/\omega}\fallingdotseq0.731\sqrt{K_y\lambda/\lambda_u}\qquad(\text{Kitamuraの近似式}) \quad (A.6.4)$$

自然光源サイズ

$$\sigma_{r,x}\fallingdotseq\sqrt{\sigma_r^2+(\sigma_{r,x'}N\lambda_u/2)^2}+x_{max},\quad \sigma_{r,y}\fallingdotseq\sqrt{\sigma_r^2+(\sigma_{r,y'}N\lambda_u/2)^2} \quad (A.6.5)$$

ただし,.

$$x_{max}=\frac{K_y\lambda_u}{2\pi\gamma} \quad (A.6.6)$$

$\sigma_r\sigma_{r,y'}=\lambda/4\pi$ より，Kitamuraの近似式を使って

$$\sigma_r\fallingdotseq0.109\sqrt{\lambda\lambda_u/K_y} \quad (A.6.7)$$

実効角度発散

$$\Sigma_{x'}\fallingdotseq\sqrt{\sigma_{r,x'}^2+\sigma_{x'}^2},\qquad\Sigma_{y'}\fallingdotseq\sqrt{\sigma_{r,y'}^2+\sigma_{y'}^2} \quad (A.6.8)$$

実効光源サイズ

$$\Sigma_x\fallingdotseq\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_r^2+(\sigma_{r,x'}N\lambda_u/2)^2}+x_{max} \quad (A.6.9)$$

$$\Sigma_y\fallingdotseq\sqrt{\sigma_y^2+\sigma_r^2+(\sigma_{r,y'}N\lambda_u/2)^2} \quad (A.6.10)$$

●光束密度

自然光束密度

$$\frac{d^2N(\omega,\theta_x,\theta_y)}{d\Omega d\omega/\omega}=1.3254889\times10^{13}(N-1/2)E_{G,V}^2I_b(\omega/\omega_c^*)^2$$

$$\times[f_+f_+^*+f_-f_-^*+g_+g_+^*+g_-g_-^*]\ \text{(photons/s/mrad}^2\text{/0.1\%b.w.)} \quad (A.6.11)$$

ただし,

$$f_\pm = K_{2/3}(\xi)(1 + \zeta_\pm^2),\quad g_\pm = iK_{1/3}(\xi)\zeta_\pm\sqrt{1+\zeta_\pm^2} \tag{A.6.12}$$

$$\xi = \omega(1 + \zeta_\pm^2)^{3/2}/2\omega_c^*,\quad \zeta_\pm(\gamma\theta_y) = \gamma\theta_y \pm K_x,\quad \omega_c^*(\gamma\theta_x) = \omega_c\sqrt{1-\left(\frac{\gamma\theta_x}{K_y}\right)^2} \tag{A.6.13}$$

軸上($\theta = 0$)での楕円軸比は

$$\left|\frac{E_y}{E_x}\right| = \frac{K_x K_{1/3}(\xi_0)}{(1 + K_x^2)^{1/2}K_{2/3}(\xi_0)} \tag{A.6.14}$$

$$\xi_0 = \omega(1 + K_x^2)^{3/2}/2\omega_c \tag{A.6.15}$$

実効光束密度

$$\left[\frac{d^2N(\omega,\theta_x,\theta_y)}{d\Omega d\omega/\omega}\right]_{eff} = 1.3254889\times10^{13}(N-1/2)E_{G\cdot v}^2 I_b \times\frac{S_{xx}+S_{yy}}{2\pi\gamma\sigma_{x'}\cdot\gamma\sigma_{y'}}\quad \text{(photons/s/mrad}^2\text{/0.1\%b.w.)} \tag{A.6.16}$$

直線偏光度と円偏光度は

$$P_L = \frac{S_{xx} - S_{yy}}{S_{xx} + S_{yy}},\quad P_c = \frac{2iS_{xy}}{S_{xx} + S_{yy}} \tag{A.6.17}$$

ただし,

$$S_{xx} = \int_{-K_y}^{K_y} du\left(\frac{\omega}{\omega_c^*}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty} dv[f_+f_+^* + f_-f_-^*]\exp\left(\frac{-(u-\gamma\theta_x)^2}{2\gamma^2\sigma_{x'}^2} + \frac{-(v-\gamma\theta_y)^2}{2\gamma^2\sigma_{y'}^2}\right) \tag{A.6.19}$$

$$S_{yy} = \int_{-K_y}^{K_y} du\left(\frac{\omega}{\omega_c^*}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty} dv[g_+g_+^* + g_-g_-^*]\exp\left(\frac{-(u-\gamma\theta_x)^2}{2\gamma^2\sigma_{x'}^2} + \frac{-(v-\gamma\theta_y)^2}{2\gamma^2\sigma_{y'}^2}\right) \tag{A.6.19}$$

$$S_{xy} = \int_{-K_y}^{K_y} du\left(\frac{\omega}{\omega_c^*}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty} dv[f_+g_+^* + f_-g_-^*]\exp\left(\frac{-(u-\gamma\theta_x)^2}{2\gamma^2\sigma_{x'}^2} + \frac{-(v-\gamma\theta_y)^2}{2\gamma^2\sigma_{y'}^2}\right) \tag{A.6.20}$$

$$\zeta_\pm(v) = v \pm K_x,\quad \omega_c^*(u) = \omega_c\sqrt{1-\left(\frac{u}{K_y}\right)^2} \tag{A.6.21}$$

軸上($\theta = 0$)では

$$D = \left[\frac{d^2N(\omega,0,0)}{d\Omega d\omega/\omega}\right]_{eff} \tag{A.6.22}$$

あるいは近似的に

$$D \fallingdotseq \frac{d^2N(\omega,0,0)}{d\Omega d\omega/\omega}\frac{\sigma_{ry'}}{\Sigma_{ry'}} \tag{A.6.23}$$

●輝度(軸上)

$$B = \frac{\frac{D}{2}\left[1 + \exp\left(\frac{-(2x_{max})^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_r^2)}\right)\right]}{2\pi\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_r^2}\sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_r^2}} \tag{A.6.24}$$